

221 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ Φροντιστηριακές Ασκήσεις // 1

1) Έστω $f(x) = (x-1)^3(x+\sqrt{2})^2(x^2+x+1)^3$ στον $R[x]$. Βρείτε όλα τα μονικά πολυώνυμα τα οποία διαιρούν το $f(x)$.

Κάντε το ίδιο για όλα τα μονικά πολυώνυμα τα οποία διαιρούν το $f(x)$ και έχουν τις ίδιες ρίζες με το $f(x)$.

Κάντε το ίδιο για το $f(x) = (x-a_1)^{k_1}(x+a_2)^{k_2}(x^2+x+1)^{k_3}(x^2+2x+5)^{k_4}$.

2) Εξετάστε αν το $f(x) = x^3 + 7x^2 + 3x + 1$ είναι ανάγωγο στο $Q[x]$.

Το ίδιο για το $g(x) = x^4 + 1$.

4) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x) = x^4 + 1$ με το $g(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$.

5) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{και } C = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι πίνακες B και C ;

6) Δείξτε ότι το 5 είναι ιδιοτιμή του πίνακα A αν το 3 είναι ιδιοτιμή του $A - 2I$.

7) Υποθέτουμε ότι για τους τετραγωνικούς πίνακες A και B ισχύει $AB = BA$. Αν το u είναι ιδιοδιάνυσμα του A με $u \notin \ker A$, τότε το $B(u)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A .

8) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$